Applications linéaires

Exercice 1. Les applications suivantes suivantes sont-elles linéaires ?

1) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ définie par $f(x,y) = (x+y, x-2y, 0)$
2) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ définie par $f(x,y) = (2x+y, y+1)$
3) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ définie par $f(x,y) = (xy, yx)$
4) $f : \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \to \mathbb{R}^3$ définie par $f((u_n)) = (u_0, u_1, u_2)$
5) $f : \mathbb{K}_2[X] \to \mathbb{K}$ définie par $f(P) = P(2)$
6) $f : \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ définie par $f\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right) = a+d$
7) $\varphi : C^\infty(\mathbb{R}) \to C^\infty(\mathbb{R})$ définie par $\varphi(f) = f'' - 4f$
8) $\varphi : C^\infty(\mathbb{R}) \to C^\infty(\mathbb{R})$ définie par $\varphi(f) = 2ff'$

Exercice 2. Pour tout $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$, déterminer $f(x,y,z)$ où $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ est l'application définie par

$$f(1,0,0) = (-2,0,2) \qquad f(0,1,0) = (0,3,0) \qquad f(0,0,1) = (-4,0,4)$$

Image, noyau, rang

Exercice 3. Déterminer le noyau et l'image des applications linéaires suivantes :

1) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ définie par $f(x,y) = (x+y, x-y, x+y)$
2) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ définie par $f(x,y) = (x-y, -3x+3y)$
3) $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ définie par $f(x,y,z) = (-2x+y+z, x-y, x-2y+z)$
4) $f : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}$ définie par $f(u,v) = 2u + iv$, ($\mathbb{C}^2$ et $\mathbb{C}$ sont vus comme des $\mathbb{C}$-e.v.)
5) $f : \mathbb{K}[X] \to \mathbb{K}[X]$ définie par $f(P) = P'$
6) $f : \mathbb{K}[X] \to \mathbb{K}[X]$ définie par $f(P) = P - (X+1)P'$
7) $\varphi : C^2(\mathbb{R}) \to C^0(\mathbb{R})$ définie par $\varphi(f) = f'' - 4f' + 5f$
8) $f : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ définie par $f(M) = M + M^\top$

Exercice 4. Soit E, F, G trois $\mathbb{K}$-e.v. puis $f \in \mathcal{L}(E,F)$ et $g \in \mathcal{L}(F,G)$.

1) Montrer que $g \circ f = 0$ si et seulement si $\operatorname{Im} f \subset \operatorname{Ker} g$.
2) Montrer que $\operatorname{Ker} f \subset \operatorname{Ker}(g \circ f)$ et que $\operatorname{Im}(g \circ f) \subset \operatorname{Im} g$.
3) En déduire que si $g \circ f$ est un isomorphisme, alors f est injective et g est surjective.

Exercice 5. On considère f l'application de l'exercice 2.

1) Déterminer une base de $\operatorname{Ker} f$ et de $\operatorname{Im} f$.
2) L'application f est-elle injective ? surjective ?
3) Montrer que $\mathbb{R}^3 = \operatorname{Ker} f \oplus \operatorname{Im} f$.

Exercice 6. Soit $F = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = y = z\right\}$. Existe-t-il une application $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R})$ de noyau F ?

Exercice 7. On définit $\varphi : \mathbb{C}^{\mathbb{N}} \to \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ par

$$\varphi : (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \mapsto (u_{n+1} - u_n)_{n\in\mathbb{N}}$$

Montrer que φ est linéaire et déterminer $\operatorname{Ker}\varphi$ et $\operatorname{Im}\varphi$. Est-ce que φ est injective ? surjective ?

Exercice 8. Soit E un e.v. et $f \in \mathcal{L}(E)$. Montrer les assertions suivantes :

$$\operatorname{Ker} f \subset \operatorname{Ker} f^2 \qquad \operatorname{Ker} f = \operatorname{Ker} f^2 \iff \operatorname{Ker} f \cap \operatorname{Im} f = \{0\}$$
$$\operatorname{Im} f^2 \subset \operatorname{Im} f \qquad \operatorname{Im} f = \operatorname{Im} f^2 \iff \operatorname{Ker} f + \operatorname{Im} f = E$$

Projecteurs, symétries, etc.

Exercice 9. Déterminer si les applications suivantes sont des projecteurs ou des symétries, et déterminer leurs éléments caractéristiques :

1) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ définie par $f(x,y) = (x, -2x-y)$
2) $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ définie par $f(x,y,z) = (x+y-z, x+y-z, x+y-z)$
3) $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ définie par $f(x,y,z) = \dfrac{1}{2}(x-z, 2y, -x+z)$
4) $f_Q : \mathbb{R}[X] \to \mathbb{R}[X]$ définie par $f(P) = R$, où R est le reste de la division euclidienne de P par $Q \in \mathbb{R}[X]$ fixé.

Exercice 10. Déterminer l'expression :

1) Du projecteur $p \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$ sur $F = \operatorname{Vect}((0,1))$ parallèlement à $G = \operatorname{Vect}((1,1))$.
2) De la symétrie $s \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$ par rapport à F et parallèlement à G (définis ci-dessus).
3) De la symétrie $s \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ par rapport à $F = \operatorname{Vect}((1,2,3))$ et parallèlement à $G = \operatorname{Vect}((1,0,0),(1,1,0))$.
4) Du projecteur $p \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ sur G et parallèlement à F (définis ci-dessus).

Exercice 11. Soit $p \in \mathcal{L}(E)$ et $q = \mathrm{id}_E - p$.

1) Montrer que p est un projecteur si et seulement si q est un projecteur.
2) On suppose que p est un projecteur. Montrer que $\operatorname{Im} p = \operatorname{Ker} q$ et que $\operatorname{Ker} p = \operatorname{Im} q$.

Exercice 12. Soit p, q deux projecteurs de E. Montrer que

$$\operatorname{Ker} p = \operatorname{Ker} q \iff (p\circ q = p \quad \text{et} \quad q \circ p = q)$$
$$\operatorname{Im} p = \operatorname{Im} q \iff (p\circ q = q \quad \text{et} \quad q \circ p = p)$$

Formes linéaires

Exercice 13. On pose $E := \mathbb{R}^2$ et $f, g \in E^*$ les applications

$$f(x,y) = x+y \qquad g(x,y) = x-y$$

1) Montrer que (f,g) forme une base de E^*.
2) Déterminer les coordonnées de $p : (x,y) \mapsto x$ et de $q : (x,y) \mapsto y$ selon la base (f,g).
3) Trouver une base (u,v) de E telle que (f,g) soit la base duale de (u,v).